> **Note**
>
> Date: 2025-11-24
>
> Type: 数学分析（上）
>
> Source: 综合

本文作为常用积分的 Memo（我愿意称为**二级积分结论**）。

前言

请复习前，先思考一下以下积分如何计算：

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{k/2}}\,\mathrm{d}x \quad (k=\color{red}{-1}, 1, 2, 3, \color{red}{4}) \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{\cos^k x}\,\mathrm{d}x \quad (k=-2, \color{red}{1}, 2, \color{red}{3}, \color{red}{\cdots}) \tag{3}$$

$$\int \tan^k x\,\mathrm{d}x \quad (k=\color{red}{-2}, -1, \color{red}{1}, 2) \tag{4}$$

$$\int \ln(x^2+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$\int \arctan x\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

解答

(1)

最常见的方法是三角换元，考虑 $x=\sin t$。则

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \cos t\,\mathrm{d}(\sin t)\\ &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C\end{aligned}$$

注

不在此处列入的是 $\dfrac{1}{x^2-1}$ 的原函数求解，这在 $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$ 中已然蕴含。

(2)

熟知积分表，有

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$$

其余有两种情况，我们都可以通过三角换元 $x = \tan\theta$ 来解决。也即：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \cos^4\theta \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C\end{aligned}$$

此外：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x &= \int \cos^3\theta \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C\end{aligned}$$

困难的是 $\sqrt{1+x^2}$ 的原函数。考虑到

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \left(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

这已然解完。

注

在运用三角换元的同时，不应当忘记双曲三角换元；双曲三角换元可以便捷地求解 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的原函数。

给出答案：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C$$

(3)

$\cos^2 x, \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 的原函数略。

而

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C\end{aligned}$$

此外，注意到 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$，以及 $(\tan x)' = \sec^2 x$，原题所求积分的递推式应当是不难得到的。即：

$\int \sec^n \theta \, d\theta = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} \theta \tan \theta + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} \theta \, d\theta$

注

$\dfrac{1}{\sin x}$ 的原函数求解和 $\dfrac{1}{\cos x}$ 是几乎一样的。直接给出答案：

$$\int \frac{1}{\sin x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} \right| + C$$

(4)

注意到 $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$，$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$。进一步，我们有 $(\cot x)' = -\csc^2 x$，易求。

接下来，

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

注 1

我们可以求 $\tan^3 x, \tan^4 x$ 的原函数。

基本的想法是，运用 $\tan^2 x = (\sec^2 x - 1)$ 以及 $\mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x \, \mathrm{d}x$。

注 2

更进一步，我们可以求 $\tan^n x \ (n \in \mathbb{N})$ 的原函数。

(5)

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2 + \sqrt{1+x^2}) \, \mathrm{d}x &= x \ln(x^2 + \sqrt{1+x^2}) - \int x \, \mathrm{d}(\ln(x^2 + \sqrt{1+x^2})) \\ &= x \ln(x^2 + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x \\ &= x \ln(x^2 + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C\end{aligned}$$

(6)

具体地，令

$$I = \int \frac{1}{1+x^4} \, \mathrm{d}x, \quad J = \int \frac{x^2}{1+x^4} \, \mathrm{d}x$$

则

$$\begin{aligned} I + J &= \int \frac{\mathrm{d}\left(x - 1/x\right)}{\left(x - 1/x\right)^2 + 2} \\ -I + J &= \int \frac{\mathrm{d}\left(x + 1/x\right)}{\left(x + 1/x\right)^2 - 2} \end{aligned}$$

可知

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| \\
J &= \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|
\end{aligned}
$$

(7)

只是作为一个分部积分的训练。

$$
\begin{aligned}
\int \arctan x \, \mathrm{d}x &= x\arctan x - \int x \, \mathrm{d}(\arctan x) \\
&= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C
\end{aligned}
$$