> ⓘ **Note**
>
> Date: 2025-11-24
>
> Type: 数学分析（上）
>
> Source: 数海钓鱼 刘适禛 讲义

问题

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可微，且 $a,b\in\mathbb{R}$，满足 $a>0, a^2-4b<0$ 或者 $a>0, b>0, a^2-4b>0$ 。且有

$$\lim_{x\to+\infty}(f''(x)+af'(x)+bf(x))=\ell\in\mathbb{R}.$$

证明：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\ell}{b},\quad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=0$$

解答

> 此类问题就是考虑微分方程的解，然后对着拆一下，实现降阶，中间要用洛必达法则。

不妨设 $\ell=0$（若 $\ell\neq 0$，可令 $g(x)=f(x)-\dfrac{\ell}{b}$，转化为 $g(x)$ 的情况），则需要证明 $f(x),f'(x)\to 0$，自然根据条件就有 $f''(x)\to 0$。

设方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根为 λ_1,λ_2，也即 $x^2+ax+b=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$。

本题条件表明要么这是两个负根（对应 $a^2-4b>0$），要么这是一对共轭虚根并且实部都是负的（对应 $a^2-4b<0$）。下面分类讨论。

情形 1

如果 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$（实根情形）则考虑求导关系：

$$\left(e^{-\lambda_2 x}(f'(x)-\lambda_1 f(x))\right)'=e^{-\lambda_2 x}(f''(x)+af'(x)+bf(x))$$

$$\frac{\left(e^{-\lambda_2 x}(f'(x)-\lambda_1 f(x))\right)'}{(e^{-\lambda_2 x})'}=\frac{f''(x)+af'(x)+bf(x)}{-\lambda_2}\to 0$$

因 $\lambda_2<0$，故 $x\to+\infty$ 时 $e^{-\lambda_2 x}\to+\infty$，分母趋于无穷。根据洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}(f'(x)-\lambda_1 f(x))=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda_2 x}(f'(x)-\lambda_1 f(x))}{e^{-\lambda_2 x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{-\lambda_2 x}(f'(x)-\lambda_1 f(x)))'}{(e^{-\lambda_2 x})'}=0$$

再来一次就有：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda_1 x}f(x)}{e^{-\lambda_1 x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{-\lambda_1 x}f(x))'}{(e^{-\lambda_1 x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)-\lambda_1 f(x)}{-\lambda_1}=0$$

所以 $f(x)$，$f'(x)$ 都趋于零，结论得证。

情形 2

如果 $\lambda_1=-u+vi,\lambda_2=-u-vi,u>0,v\neq 0$（复根情形）。

这是一对实部小于零的共轭虚根，则我们不能和前面一样把 $e^{-\lambda_2 x}$ 放到分母上然后求导，因为它并不是单调的，更何况还有复数出现，没有这样子的洛必达法则。

不管实数复数，前面的求导关系都是成立的，只需要稍加修改：

$$\left(e^{(u+vi)x}(f'(x)-(-u+vi)f(x))\right)'=e^{(u+vi)x}(f''(x)+af'(x)+bf(x))$$

$$\frac{\left(e^{(u+vi)x}(f'(x)-(-u+vi)f(x))\right)'}{(e^{ux})'}=\frac{e^{ivx}}{u}(f''(x)+af'(x)+bf(x))\to 0$$

根据洛必达法则则有（分母单调递增趋于正无穷，分子是 $p(x)+iq(x)$ 的形式，本质实部虚部分别洛必达）：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}e^{ivx}(f'(x)-(-u+vi)f(x))&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{(u+vi)x}(f'(x)-(-u+vi)f(x))}{e^{ux}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{(u+vi)x}(f'(x)-(-u+vi)f(x)))'}{(e^{ux})'}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ivx}}{u}(f''(x)+af'(x)+bf(x))=0\end{aligned}$$

注意 e^{ivx} 是模长为 1 的复数，所以：

$$\lim_{x\to+\infty}(f'(x)-(-u+vi)f(x))=\lim_{x\to+\infty}(f'(x)+uf(x))+iv\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

因为 $v\neq 0$，对比实部虚部，所以 $f(x)\to 0,f'(x)\to 0$，结论得证。

附注

本题最初来源于《数学分析 101（上册）》习题 7.2.9：

> 设 f 是方程
>
> $$\begin{cases}f''(x)+3f'(x)+4f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+x+1}, & x\geq 0,\\ f(0)=1, \quad f'(0)=2.\end{cases}$$
>
> 的解。证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$。