> **Note**
>
> Date: 2025-11-01
>
> Type: 高等代数（上）
>
> Source: *The Supplement of Daily Math*, 30th, Oct

我们来继续看矩阵乘法相关问题。

逆

P1

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 为 n 级矩阵，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 均可逆。已知 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{D}^{-1}$ 可逆，求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}')^{-1}$。

S1

请读者自己验证下式：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}')^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{D}^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}$$

P2

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_3\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，求出 $\boldsymbol{B}$ 可逆的条件，并求出此时 $\boldsymbol{B}$ 的逆。

S2

首先，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}_1|\cdot|\boldsymbol{A}_2|$，因此 $\boldsymbol{B}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 可逆。

另一方面，我们有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_3\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\xrightarrow{l_1+(-\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2^{-1})l_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2^{-1}\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_3\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$$

由此可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_3\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2^{-1}\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$$

化简得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2^{-1}\\ 0 & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}$$

E3

我们考虑初等变换法求逆的本质：

设 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$。设 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$。由于 $\boldsymbol{I}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，因此 $\boldsymbol{X}_j$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varepsilon}_j$ 的一个解。

由于 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varepsilon}_j$ 有唯一解。由于对 $j = 1, 2, \cdots, n$，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varepsilon}_j$ 的系数矩阵都是 $\boldsymbol{A}$，因此为了统一解 n 个线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varepsilon}_j, j = 1, 2, \cdots, n$，先解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'$，然后把所得的解的公式中的 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 分别用 $\boldsymbol{\varepsilon}_j'$ 代替，便可求得 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n$。

类似地，可以利用线性方程组来解矩阵方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{s\times n} \neq 0$。$\boldsymbol{B}_{s\times m}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$。解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 的原理和方法如下:

设 $\boldsymbol{X}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_m$。则 $\boldsymbol{X}_j$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta}_j$ 的一个解，$j = 1, 2, \cdots, m$。由于这 m 个线性方程组的系数矩阵都是 $\boldsymbol{A}$，因此可以采用下述方法同时解这 m 个线性方程组:

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{G}, \boldsymbol{D}),$$

其中 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的简化行阶梯形矩阵。从 $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{D})$ 可以写出每个线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta}_j$ 的一般解公式，从而可写出 $\boldsymbol{X}_j$，于是可写出矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 的解。

对于矩阵方程 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，两边取转置得，$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{B}'$，从而可利用上述方法先求出矩阵方程 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{B}'$ 的解，然后把所求出的解 $\boldsymbol{X}'$ 取转置即得原矩阵方程 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ 的解。

这一方法的优点在于，它不仅简化了计算量，还可以解 $\boldsymbol{A}$ 不可逆情况下的矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$。

秩

P4

设 $\boldsymbol{A}_{s\times n}, \boldsymbol{B}_{n\times m}$，证明:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - n$$

P5

设实数域上 $\boldsymbol{A}_{s\times n}$，证明：对任意 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^s$，线性方程组 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{\beta}$ 一定有解。

> **Important**
>
> **请回到** 2025.10.30：10 月 30 日刊，查看原先内容。