> **Note**
>
> Date: 2025-10-30
>
> Type: 高等代数（上）
>
> Source: 综合

~~无理由的拖更~~　有理由的拖更

我们来看矩阵乘法涉及到的行列式和秩问题，以及特别特别牛的求逆问题。

# 行列式

## P1

求行列式

$$\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$$

## S1

考虑设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_0^n & C_n^1 a_0^{n-1} & \cdots & 1 \\ a_1^n & C_n^1 a_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^n & C_n^1 a_n^{n-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix}$$

则运用二项式定理易见

$$\text{LHS} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$$

# 秩

## P2

设 $\boldsymbol{A}_{s\times m}, \boldsymbol{B}_{m\times n}$，证明：$\text{rank}(\boldsymbol{AB}) = \text{rank}(\boldsymbol{B})$ 当且仅当 $\boldsymbol{AB}x = 0$ 之解均为 $\boldsymbol{B}x = 0$ 之解。

## S2

易见。　$\square$

由这一重要结论，可以推导：

### P2-1

设 $\boldsymbol{A}_{s\times m},\boldsymbol{B}_{m\times n}$，若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$，证明：对于任意 $\boldsymbol{C}_{n\times r}$，均有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})$。

### P2-2

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 级矩阵，证明：若存在正整数 $m$ 使得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^m)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{m+1})$，则对于任意正整数 $k$，均有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^m)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{m+k})$。

由 **E2-2**，还可以推导：

### P2-3

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 级矩阵，证明：对于任意正整数 $k$，均有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^n)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{n+k})$。

## P3

证明：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 级矩阵，证明：$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AA'})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$。

## S3

易见。 $\square$

> 注记：以上证明秩相同的方法均为证明有公共解空间，其他方法包括：
>
> - 构造对角分块矩阵；
> - 运用三条经典不等式；
> - 使用秩与子式的关系等。

由这一重要结论，可以推导：

### P3-1

证明：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 级矩阵，证明：$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AA'A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$。

前置知识：

### P3-2

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 级矩阵，若 $\boldsymbol{AA'}=0$，证明：$\boldsymbol{A}=0$。

# 逆

## E4：神秘构造题

已知 $\boldsymbol{A}_{n\times m},\boldsymbol{B}_{m\times n}$，若 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{AB}$ 可逆，证明：$\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{BA}$ 可逆，并求其逆。

## S4

设 $\boldsymbol{X}$ 满足：

$$(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{X})=\boldsymbol{I}_m$$

即

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{BAX}=\boldsymbol{BA}$$

设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BYA}$，则

$$\boldsymbol{BYA}-\boldsymbol{BABYA}=\boldsymbol{BI}_n\boldsymbol{A}$$

即

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{ABY}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{A}=0$$

我们发现：只要 $\boldsymbol{Y}$ 满足 $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{I}_n$ 即可。而这表明 $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{AB})^{-1}$。

故 $(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$。

# P5：重要矩阵

我们定义

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&1&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1&1\\1&1&1&\cdots&1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\1&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

求下列矩阵的逆（如无特殊说明均为 $n$ 阶，$n\geq 2$）：

## P5-1

$$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

## S5-1

显然 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I}$，钦定 $\boldsymbol{W}^{-1}=a\boldsymbol{I}+b\boldsymbol{J}$。则由于 $\boldsymbol{J}^2=n\boldsymbol{J}$，有

$$(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})(a\boldsymbol{I}+b\boldsymbol{J})=\boldsymbol{I}$$

化简得

$$(a+1)\boldsymbol{I}=(a-b+bn)\boldsymbol{J}$$

应钦定两个系数为 $0$，解得 $a=-1,b=\dfrac{1}{n-1}$。

### P5-2

$$\boldsymbol{V}=2\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')$$

绝世好题。

### P5-3

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-1}\\ 0 & 1 & b & \cdots & b^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

### S5-3

一个重要的性质：

$$\boldsymbol{V}=\sum_{k=0}^{n-1}b^k\boldsymbol{H}^k$$

且 $\boldsymbol{H}^n=0$。

因此，有 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}-b\boldsymbol{H})=\boldsymbol{I}-b^n\boldsymbol{H}^n=\boldsymbol{I}$。

### P5-4

求 $(a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}$。

> 此问题做法与上面有区别。

## P6：重要矩阵续

下列形状的矩阵称为循环矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1\end{pmatrix}$$

证明：同阶循环矩阵之积仍是循环矩阵。

## S6

注意到 $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{I}+a_2\boldsymbol{M}+a_3\boldsymbol{M}^2+\cdots+a_n\boldsymbol{M}^{n-1}$，且 $\boldsymbol{M}^n=\boldsymbol{I}$，上述有关循环矩阵的定义式可视作关于 $\boldsymbol{M}$ 的多项式。 $\square$

> **Important**
>
> **请移步** [2025.11.01：10 月 30 日增刊]，查看更多内容。