- Date：2025.10.23
- Type: 数学分析（一）
- Source: 数分 101

注：以下内容整理自他人数学分析课程笔记，主要涉及连根式数列的收敛性判别方法及相关例题。

一、Herschfeld 判别法

定理 1 (Herschfeld 判别法) 设 $p > 1$，定义数列

$$a_n = \sqrt[p]{b_1 + p\sqrt[p]{b_2 + \cdots + p\sqrt[p]{b_n}}}$$

其中 $b_n > 0$。则数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是数列

$$\left\{\frac{\ln b_n}{p^n}\right\}$$

有界。

证明思路：

必要性证明（收敛 ⇒ 有界）

通过适当放缩，得到 $a_n \geq (b_n)^{1/p^n}$。由于 $\{a_n\}$ 收敛，故有界，从而 $(b_n)^{1/p^n}$ 也有界。两边取对数即得结论。

充分性证明（有界 ⇒ 收敛）

由 $\dfrac{\ln b_n}{p^n}$ 有界可推出 $b_n \leq M^{p^n}$（$M > 0$ 为常数）。代入定义进行放缩：

$$a_n \leq M \cdot \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}}$$

构造辅助数列 $x_1 = 1$，$x_{n+1} = (1 + x_n)^{1/p}$。通过求导和压缩映射原理证明该数列单调递增且有上界，从而说明上述表达式有界。同时 a_n 本身单调递增，由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛。

二、Pólya 判别法的推广形式

引理 1 (Pólya 判别法) 设 $a_n > 0$，$r \geq 2$，定义

$$t_n = \sqrt[r]{a_1 + \sqrt[r]{a_2 + \cdots + \sqrt[r]{a_n}}}$$

令 $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\ln a_n}{n}$，则：

1. 若 $a > \ln r$，数列 $\{t_n\}$ 发散；
2. 若 $a < \ln r$，数列 $\{t_n\}$ 收敛。

注：此判别法可以基本解决课内大部分连根式敛散性问题。

三、典型例题分析

例题 1 证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{m+\sqrt{m+1+\sqrt{m+2+\cdots+\sqrt{m+n}}}}$$

存在（记该极限为 a_m），并计算

$$\lim_{m\to\infty}(a_m-\sqrt{m})$$

解答：

第一问：极限存在性证明

通过证明该连根式定义的数列单调递增且有上界，应用单调有界定理即可证明极限存在。

第二问：极限计算

由定义可得递推关系：

$$a_m^2 = m + a_{m+1}$$

计算过程：

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}(a_m-\sqrt{m}) &= \lim_{m\to\infty}\frac{a_m^2-m}{a_m+\sqrt{m}}\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{(m+a_{m+1})-m}{a_m+\sqrt{m}}\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{a_{m+1}}{a_m+\sqrt{m}}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

补充估计：实际上有更精细的估计 $\sqrt{m} < a_m < \sqrt{m}+1$。