> ⓘ **Note**
>
> Date: 2025-10-19
>
> Type: 高等数学（上）
>
> Source: Not clear

无理由的拖更。

题目 1

求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)^{n+1}}{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)^n}\mathrm{d}x$$

解答 1

令 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}$，应用伯努利不等式，当 $0\le x\le 1$ 时，有：

$$\left(\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n-1}}{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}}\right)^n=\left(1-\frac{1}{f_n(x)}\cdot\frac{x^n}{n}\right)^n\ge 1-\frac{x^n}{f_n(x)}$$

因此

$$\begin{aligned}I_n&\ge\int_0^1\left(f_n(x)-\frac{x^n}{n}\right)\left(1-\frac{x^n}{f_n(x)}\right)\mathrm{d}x\\&\ge\int_0^1\left(f_n(x)-\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

又有

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

同时

$$\int_0^1\frac{x^n}{n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n(n+1)},\quad\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$

因此

$$I_n\ge 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n+1}=2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

另一方面，有

$$I_n\le\int_0^1\left(f_n(x)-\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{n}$$

得到不等式

$$2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\le I_n\le 2-\frac{1}{n}$$

当 $n\to\infty$ 时，左右两边都趋于 2，由夹逼准则得：

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 2$$

题目 2

求

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$$

其中

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t$$

解答 2

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \left(\int_t^\pi \mathrm{d}x\right) \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t \\
&= 2
\end{aligned}$$