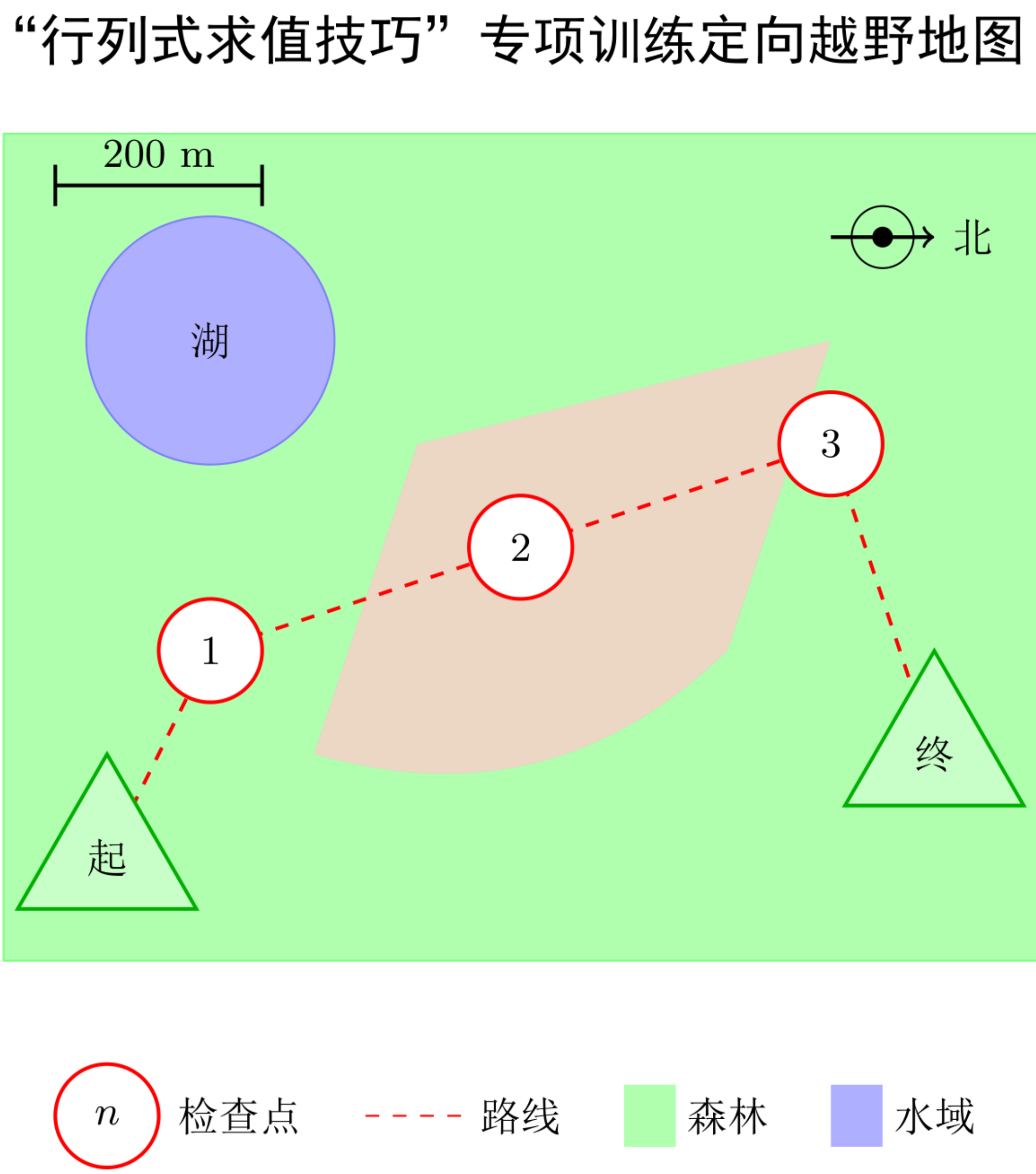
> ⓘ **Note**
>
> Date: 2025-10-16
>
> Type: 高等代数（上）
>
> Source: Multiple sources

昨天停更一天呵呵。原因是星期三能活下来就很不容易了。

今天上高代，感觉比数分轻松不知道多少，起码今天的作业全是独立做出来的，那我们来看看今天的主题——**行列式求和技术（Determinant Summation Techniques）**。

以及用 TikZ 做了个好玩的图。



下面就让我们跟着制图员的脚步，来完成这次定向越野吧。

检查点 1：消元

【例 1】求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

【解答】将第 i 列减去第 $i+1$ 列（$i=1,2,\cdots,n-1$）。

变换后的行列式：

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & 1 \end{vmatrix}$$

令第 1 行的 (-1) 倍加到其余 $n-1$ 行。

变换后的行列式：

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 & -3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & -(n-1) \end{vmatrix}$$

这是一个爪形。令第 i 行依次加上其余 $n-1$ 行的 $\dfrac{1}{n}$ 倍。

变换后的行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n-1) \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 & -3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & -(n-1) \end{vmatrix}$$

按第 1 行展开即知答案。

> **Important**
>
> 平凡地，将第 $2\sim n$ 列加到第 1 列上，提取 $n(n+1)/2$ 也可做。**关键看消元技术如何。**

> **Caution**
>
> 一定要注意，按行/列展开后，不要忘记乘 $(-1)^{i+j}$。

【例 2】设 $A=(a_{i,j})\in M_n(F)$，令 $b_{ij}=(a_{i1}+a_{i2}+\cdots a_{in})-a_{ij}$，并构造 $B=(b_{i,j})$。求 $\dfrac{|B|}{|A|}$。

【解答】将第 $2\sim n$ 列加到第 1 列上，记 S_i 为 A 第 i 行元素之和，可得 $(n-1)S_i$。即可提取出 $(n-1)$。则

$$|B| = (n-1)\begin{vmatrix} S_1 & S_1 - a_{12} & \cdots & S_1 - a_{1n} \\ S_2 & S_2 - a_{22} & \cdots & S_2 - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_n & S_n - a_{n2} & \cdots & S_n - a_{nn} \end{vmatrix}$$

接下来的消元是自然的，我们以第 1 列的 (-1) 倍加到第 $2 \sim n$ 列。再将第 $2 \sim n$ 列加到第 1 列。

可得

$$|B| = (n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot |A|$$

> **Tip**
>
> 这里指出，如果我们化出某一行/列所有数是相等的，那么常常固定其中某行，将其 (-1) 倍加到其余行上。

【例 3】已知 $\cos mx = 2^{m-1}\cos^m x + P(\cos x)$ $(\deg P \le m-1)$ 。求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_1 & \cos 2x_1 & \cdots & \cos(n-1)x_1 \\ 1 & \cos x_2 & \cos 2x_2 & \cdots & \cos(n-1)x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \cos x_n & \cos 2x_n & \cdots & \cos(n-1)x_n \end{vmatrix}$$

检查点 2：增广

【例 4】求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

看起来就很 Vandermonde，但不能直接用，咋办呢？我们加入一个元 y。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

如果按第 $n+1$ 列展开，会发现 y^{n-1} 的系数就是原来行列式的值。

而这个是显然可以 Vandermonde 的。

【例 5】求行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$$

【法 1】我们可以把含 1 的项拆出来，剩下的就是简单配凑消元。

【法 2】以下行列式的值与原行列式相等：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$$

检查点 3：归纳

暂时请移步 2025 年 10 月 1 日部分习题解答（线性代数）。

明天的预告？

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)^{n+1}}{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)^n}\mathrm{d}x$$