> ⓘ **Note**
>
> Date: 2025-10-14
>
> Type: 数学分析（一）
>
> Source: 谢惠民数学分析参考题 §5

设 $f:[a,b]\to[a,b]$，设 $x_1\in[a,b]$，令 $x_{n+1}=f(x_n)\ (n\geq 1)$。证明：$\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$。

引例

为解决这个问题，我们先看一个引例（来自谢惠民数学分析参考题 §3）

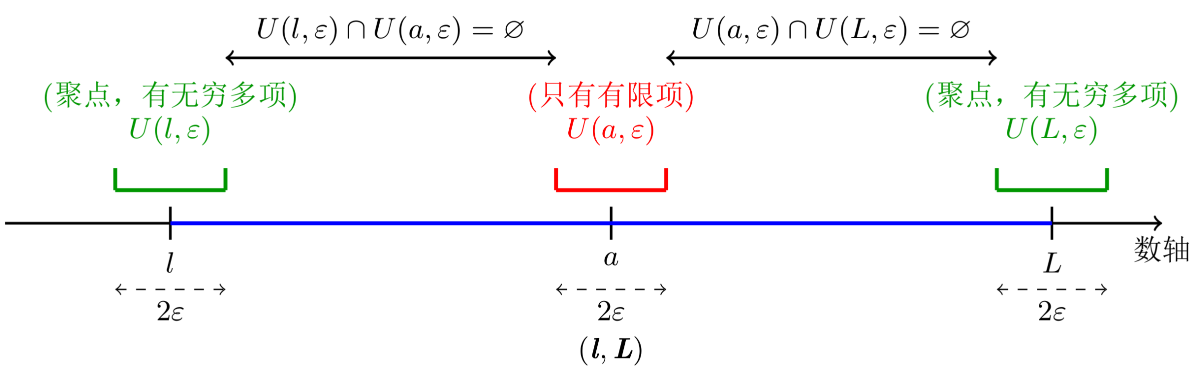
> 设 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$。设 $l=\varliminf\limits_{n\to+\infty}x_n, L=\varlimsup\limits_{n\to+\infty}x_n$ 证明：在区间 $[l,L]$ 中的每一个点都是数列 $\{x_n\}$ 的聚点。

$l=L$ 显然。并且 l,L 的证明亦易见。

若 $l<L$ 则只需证 $\forall a\in(l,L)$，a 均为聚点。

反证。设存在 $a\in(l,L)$，$\exists\varepsilon$ 使得 $\{x_n\}$ 在 $U(a,\varepsilon)$ 中只有有限项 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}$，记最大下标记为 $\mathcal{N}$。不妨设 $U(l,\varepsilon)\cap U(a,\varepsilon)=\varnothing$，$U(a,\varepsilon)\cap U(L,\varepsilon)=\varnothing$。（如图）

反证法示意图：证明 (l,L) 中每点都是 $\{x_n\}$ 的极限点



由于 $x_{n+1}-x_n\to 0$，故 $\exists N>\mathcal{N}$，使得 $\forall n>N$，均有 $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$。

又由 l 是聚点，$\exists N_1>\mathcal{N}$，使得 $x_{N_1}\in U(l,\varepsilon)$。

用归纳法证 $\{x_n\}_{n\geq N_1}$ 在 $a-\varepsilon$ 左侧。由于 $U(l,\varepsilon)\cap U(a,\varepsilon)=\varnothing$，故 $x_{N_1}\leq a-\varepsilon$。

设 $k\geq N_1$ 满足，则 $x_{k+1}=x_k+(x_{k+1}-x_k)\leq a-\varepsilon+\varepsilon=a$。

由于 $U(a,\varepsilon)$ 中无不存在满足 $n>\mathcal{N}_0$ 的 x_n，故 $x_{k+1}\leq a-\varepsilon$。

这说明 $(a-\varepsilon,L]$ 中仅有 $\{x_n\}$ 内的有限项，与 L 是聚点矛盾。 $\square$

解答

今天没有注记，原因是 deepseek 老师无法产出有意思的题目了。

有了【引例】的基础，我们再来看这道题。

> 题外话：这个出人意料的结果来自《美国数学月刊》(1976) 第 83 卷第 273 页的论文，它有两方面的意义：

> 1. 给出了一维迭代数列收敛的一个充分必要条件，这时只假定迭代函数连续，与第二章中依赖于单调性的几何方法完全不同。当然也与第三章的压缩映射原理无关。
> 2. 又可看成是 Cauchy 收敛准则在一维迭代数列中的特殊化，即此时不要求数列中下标任意大的两项之间的差任意小，而只要求前后两项之差任意小即可。

必要性显然，只证充分性，用反证法，设 $\{x_n\}$ 发散。

由【引例】，$\xi_1=\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ 和 $\xi_2=\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ 间所有数都是聚点，因而 $\forall y\in(\xi_1,\xi_2)$，$\exists\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}\to y$，故 $|x_{n_k+1}-y|\le|x_{n_k+1}-x_{n_k}|+|x_{n_k}-y|\to 0$（$k\to\infty$）。故在 $x_{n_k+1}=f(x_{n_k})$ 中取 $k\to\infty$，有 $f(y)=y$，这说明 $[\xi_1,\xi_2]$ 中每点 y 都是都是 f 的不动点。

若序列 $\{x_n\}$ 的某项 x_N 落入 $[\xi_1,\xi_2]$，则由迭代定义 $x_{n+1}=f(x_n)$ 及 $[\xi_1,\xi_2]$ 中每点均为不动点可知，对一切 $n\ge N$，有 $x_n=x_N$，即序列最终为常数列，从而收敛。

这与假设 $\{x_n\}$ 发散矛盾。 $\square$