> ⓘ **Note**
>
> Date: 2025-10-13
>
> Type: 高等代数（上）
>
> Source: FDU 高代白皮书 - 指导书 & DeepSeek

设 V 是数域 K 上次数不超过 n 的多项式构成的线性空间，证明以下三组多项式均为 V 的基：

(1) $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$;

(2) $\{1, (x+1), (x+1)^2, \cdots, (x+1)^n\}$;

(3) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 为 K 中互不相等的数，$\left\{ f_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - a_j) \mid 1 \leq i \leq n+1 \right\}$。

问 1

是显然的，我们从多项式的定义出发即可得到该组多项式为 V 的一组基。

由此我们知道 V 为 $n+1$ 维线性空间。

问 2

考虑任意多项式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$，设 $f(x-1) = a'_n x^n + \cdots + a'_1 x + a'_0$。

则 $f(x) = a'_n (x+1)^n + \cdots + a'_1 (x+1) + a'_0$。 $\square$

问 3

回顾线性空间的性质：

> **Important**
>
> 若 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为 n 维线性空间 V' 中互不相等的元素，如果它们线性无关，则它们构成 V' 的一组基。

考察方程

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots a_{n+1} f_{n+1}(x) = 0$$

令 $x = a_1$，则 $f_1(x) \neq 0, f_2(x) = \cdots f_{n+1}(x) = 0$，解得 $a_1 = 0$。

依次令 $x = a_2, \cdots, a_{n+1}$，可得 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1} = 0$。

因而 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{n+1}(x)$ 线性无关。故其为 V 的一组基。

注 1：Lagrange 插值基

> 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 是 K 中互不相等的数，定义 Lagrange 插值多项式：
>
> $$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}, \quad i = 1, 2, \cdots, n+1.$$
>
> 证明：

> 1. $\{L_1(x), L_2(x), \cdots, L_{n+1}(x)\}$ 是 V 的一组基；
> 2. 对任意 $f(x) \in V$，有 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} f(a_i)L_i(x)$。

假设存在 $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1} \in K$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i L_i(x) = 0.$$

同理，依次代入 $x = a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，得 $c_1 = c_2 = \cdots = c_{n+1} = 0$。故 $\{L_i(x)\}$ 线性无关。由于 $\dim V = n+1$，它们构成一组基。

考虑多项式

$$g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n+1} f(a_i)L_i(x).$$

注意到

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

对于每个 a_k，有 $g(a_k) = 0$，所以 $ g(x) $ 有 $n+1$ 个根。但 $\deg g(x) \leq n$，故 $g(x) \equiv 0$，即

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(a_i)L_i(x).$$

实际上，我们发现 Lagrange 插值与原题（3）存在关系：

> 对于基 (3)：$f_i(x) = \prod\limits_{j \neq i}(x - a_j)$，设 $f(x) \in V$ 且已知 $f(a_i) = b_i$。求 $f(x)$ 在基 (3) 下的坐标，并写出显式表达式。

设 $f(x) = \sum c_i f_i(x)$。代入 $x = a_j$ 得：

$$f(a_j) = c_j f_j(a_j) = c_j \prod_{k \neq j}(a_j - a_k)$$

所以

$$c_j = \frac{b_j}{\prod\limits_{k \neq j}(a_j - a_k)}.$$

这与 Lagrange 插值公式形式一致。

注 2：Newton 基与递推关系

> 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 是 K 中互不相等的数，定义 Newton 多项式：
>
> $$N_0(x) = 1, \quad N_k(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - a_i), \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$
>
> 证明：
>
> 1. $\{N_0(x), N_1(x), \cdots, N_n(x)\}$ 是 V 的一组基；

> 2. 若 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_kN_k(x)$，给出系数 c_k 的递推求法（差商表示）。

$N_k(x)$ 是 k 次多项式，由于次数互异，它们线性无关。又因 $\dim V=n+1$，故构成一组基。

显然，系数 c_k 是 $f(x)$ 在点 $a_1,\dots,a_{k+1}$ 的差商：

$$c_k=f[a_1,a_2,\dots,a_{k+1}].$$

回顾差商递推公式：

$$f[a_1]=f(a_1),\quad f[a_1,\dots,a_{k+1}]=\frac{f[a_2,\dots,a_{k+1}]-f[a_1,\dots,a_k]}{a_{k+1}-a_1}.$$

因此，$f(x)$ 的 Newton 插值形式为：

$$f(x)=f(a_1)+f[a_1,a_2](x-a_1)+\cdots+f[a_1,\dots,a_{n+1}]N_n(x).$$

注 3

> 设 $W\subseteq V$ 是由所有满足 $f(0)=0$ 的多项式构成的子空间：
>
> 1. 求 W 的一组基；
> 2. 若 $W_k=\{f\in V\mid f(0)=f(1)=\cdots=f(k-1)=0\}$，求 $\dim W_k$ 及其一组基。

显然，一组基为 $\{x,x^2,\cdots,x^n\}$，$\dim W=n$。

发现 $f\in W_k$ 当且仅当 $f(x)=x(x-1)\cdots(x-k+1)g(x)$，其中 $\deg g\le n-k$。故构造一组基为：

$$\{x(x-1)\cdots(x-k+1)x^j\mid j=0,1,\dots,n-k\}$$

同理，得到 $\dim W_k=n-k+1$。