ⓘ **Note**

Date: 2025-10-12

Type: 数学分析（一）

Source: THU 10 月 11 日数分作业 Problem 4 & PKU 数分习题集 9.8.14

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 \leq a_{m+n} \leq a_m \cdot a_n, \forall m, n \geq 1$，证明：$\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 收敛。

解答

考察 Fekete 次可加性引理：若 $\{b_n\}$ 满足 $b_{m+n} \leq b_m + b_n, \forall m, n \geq 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \inf\limits_{n\geq 1}\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$。

证明之。

> **Tip**
>
> 设 $L = \inf\limits_{n\geq 1}\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$，则 $\forall \epsilon > 0$，存在 q 使得 $\frac{b_q}{q} < L + \epsilon$。
>
> 取任意 n，记 $n = kq + r\ (k \in \mathbb{N}, 0 \leq r < q)$，则连续使用次加性，可得 $b_n \leq b_{kq} + b_r \leq kb_q + b_r$。
>
> 即，$\frac{b_n}{n} \leq \frac{kb_q + b_r}{kq + r} = \frac{kq}{kq+r} \cdot \frac{b_q}{q} + \frac{b_r}{kq+r}$。
>
> 取 $n \to +\infty$，首先 $k \to +\infty$，则 $\frac{kq}{kq+r} \to 1$，$\frac{b_r}{kq+r} = \frac{b_r}{n} \to 0$。
>
> 即有 $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} \leq \frac{b_q}{q} < L + \epsilon$。
>
> 由任取性，知 $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} \leq L$。又因为 $\liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} \geq L$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = L$。 $\square$

于是，我们取 $b_n = \begin{cases} \ln a_n, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n = 0 \end{cases}$，则 $b_{m+n} \leq b_m + b_n$。

易见 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{b_n}{n}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n}}$。 $\square$

应用

想了想，似乎可以延伸出这些题目：

1. 若 $c_{m+n} \leq c_m + c_n + 1, \forall n, m \geq 1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_n + 1}{n}$ 存在。
2. 若 $d_{m+n} \leq d_m + d_n - 2mn, \forall n, m \geq 1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{d_n - n^2}{n}$ 存在。
3. 若 $0 < e_{m+n} \leq e_m + e_n + e_m e_n, \forall n, m \geq 1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(e_n + 1)}{n}$ 存在。
4. 若 $\sqrt{f_{m+n}} \leq f_m + f_n + \sqrt{f_m f_n}, \forall n, m \geq 1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{f_n} + 1)}{n}$ 存在。

注 1

超可加性引理：若 $g_{m+n} \geq g_m + g_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g_n}{n} = \sup\limits_{n\geq 1}\left\{\dfrac{g_n}{n}\right\}$。

注 2

与 **应用** 不同的是，有这样一个题目：

> 若 $h(x): \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^+$ 满足
>
> $$h(m+n) \leq h(m) + h(n) + \min\{h(m), h(n)\}, \forall n, m \geq 1$$
>
> 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h(n)}{n^2}$ 存在。

我们记 $u_n = \dfrac{h(n)}{n}$，将题述式子做变换，得

$$u_{m+n} \leq \frac{m}{m+n} u_m + \frac{n}{m+n} u_n + \frac{\min\{h(m), h(n)\}}{m+n}$$

一方面，
$\dfrac{m}{m+n} u_m + \dfrac{n}{m+n} u_n \leq \dfrac{m}{m+n} \max\{u_m, u_n\} + \dfrac{n}{m+n} \max\{u_m, u_n\} = \max\{u_m, u_n\}$
。

另一方面，$\dfrac{\min\{h(m), h(n)\}}{m+n} \leq \min\{\dfrac{m}{m+n} u_m, \dfrac{n}{m+n} u_n\} < \min\{u_m, u_n\}$。

因此 $u_{m+n} < \max\{u_m, u_n\} + \min\{u_m, u_n\} = u_m + u_n$。即满足次加性。 $\square$

注 3

另外一个题目：

> 考虑
>
> $$I_n = \int_{[0,1]^n} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} dx_1 \cdots dx_n$$
>
> 说明 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ 存在。

考虑 Schwarz 不等式：

$$\frac{(m+n)^2}{x+y} \leq \frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y}$$

配凑 $J_n = nI_n$，得到被积分式

$$\frac{n^2}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

这式子就满足 $a_{m+n} \leq a_m + a_n$，所以对积分式也满足 $J_{m+n} \leq J_m + J_n$，则结论易见。