> ⓘ **Note**
>
> Date: 2025-10-11
>
> Type: 高等代数（上）
>
> Source: FDU 高代白皮书 - 指导书

设 V 是定义在 $\mathbb{R}$ 上全体连续函数构成的实线性空间，证明下列函数系线性无关：

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx \tag{1}$$

法 1

归纳之，显然命题对 $n=0$ 成立。

设命题对小于 n 的整数成立。考虑等于 n 的情形。

设

$$a+\sum_{i=1}^{n} b_i \sin ix+\sum_{i=1}^{n} c_i \cos ix=0 \tag{2}$$

对上式左右两次求导，可得

$$-\sum_{i=1}^{n} b_i i^2 \sin ix-\sum_{i=1}^{n} c_i i^2 \cos ix=0 \tag{3}$$

令 $(3)+n^2\cdot(2)$，可得

$$n^2 a+\sum_{i=1}^{n-1} b_i (n^2-i^2) \sin ix+\sum_{i=1}^{n-1} c_i (n^2-i^2) \cos ix=0 \tag{4}$$

由归纳结论知，$a=b_1=c_1=\cdots b_{n-1}=c_{n-1}=0$。代入 (2)，得

$$b_n \sin nx+c_n \cos nx=0 \tag{5}$$

若 $b_n\neq 0$ $(c_n\neq 0)$，可得 $\tan nx=b_n/c_n$ $(\cot nx=c_n/b_n)$ 为常数，显然不可能。因而 $b_n=c_n=0$。

归纳即证之。

法 2

设

$$f(x)=a+b_1\sin x+c_1\cos x+b_2\sin 2x+c_2\cos 2x+\cdots+b_n\sin nx+c_n\cos nx=0,$$

其中 a, b_i, c_i 都是实数。依次设 $g(x)=1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx$，并分别计算定积分 $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$，可得 $a=b_1=c_1=\cdots=b_n=c_n=0.$

注记

首先容易看出，三角函数系 (1) 中所有函数具有共同的周期 2π。

其次，在三角函数系 (1) 中，任何两个不相同的函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分都等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \tag{6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n), \tag{7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n), \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0. \tag{9}$$

而 (1) 中任何一个函数的平方在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都不等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi. \tag{11}$$

回顾函数正交的定义：

> **Important**
>
> 若两个函数 φ 与 ψ 在 $[a, b]$ 上可积，且
>
> $$\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx = 0, \tag{12}$$
>
> 则称函数 φ 与 ψ 在 $[a, b]$ 上是正交的。

由此，三角函数系 (1) 在 $[-\pi, \pi]$ 上有正交性，或称 (1) 是正交函数系。